

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2000-2008

1. ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

(Θέμα 1 Α1θετ-2000)

ΘΕΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Θέμα 1 Α2θετ-2000)

Θέμα 1 Α-2003

Θέμα 1 Α- ΕΠΑΝ 2007)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(Θέμα 1 Α1-2001)

Θέμα 1 Α1-2007)

ΘΕΜΑ 4

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

(Θέμα 1 Β2-2001)

ΘΕΜΑ 5

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

(Θέμα 1 Α1- ΕΠΑΝ 2001

Θέμα 1 Β- ΕΠΑΝ 2003)

ΘΕΜΑ 6

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια

παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(Θέμα 1 Α-2002)

ΘΕΜΑ 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

(Θέμα 1 Β1-2002)

ΘΕΜΑ 8

Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

(Θέμα 1 Β-2003)

ΘΕΜΑ 9

Πότε μια ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

(Θέμα 1 Γ- ΕΠΑΝ 2003)

ΘΕΜΑ 10

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$

(Θέμα 1 Α-2004)

ΘΕΜΑ 11

Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Θέμα 1 Β-2004)

ΘΕΜΑ 12

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Θέμα 1 Α-ΕΠΑΝ 2004)

ΘΕΜΑ 13

Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(Θέμα 1 Γ-ΕΠΑΝ 2004)

ΘΕΜΑ 14

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

(Θέμα 1 Α1-2005)

ΘΕΜΑ 15

Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

(Θέμα 1 Α2-2005)

ΘΕΜΑ 16

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(Θέμα 1 Α1-ΕΠΙΛ 2005)

ΘΕΜΑ 17

Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται "1-1"?

(Θέμα 1 Α2-ΕΠΙΛ 2005)

ΘΕΜΑ 18

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

(Θέμα 1 Α1-2006)

ΘΕΜΑ 19

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .
Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

(Θέμα 1 Α2-2006)

ΘΕΜΑ 20

Να αποδείξετε ότι $(\sin x)' = -\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

(Θέμα 1 Α1-ΕΠΙΛ 2006)

ΘΕΜΑ 21

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

(Θέμα 1 Α2-ΕΠΑΝ 2006)

ΘΕΜΑ 22

Πότε δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

(Θέμα 1 Α2-2007)

ΘΕΜΑ 23

Πότε η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Θέμα 1 Α3-2007)

ΘΕΜΑ 24

Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

(Θέμα 1 Α2-ΕΠΑΝ 2007)

ΘΕΜΑ 25

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

(Θέμα 1 Α1-2008)

ΘΕΜΑ 26

Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

(Θέμα 1 Α2-2008)

ΘΕΜΑ 27

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια

παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να δείξετε ότι $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$.

(Θέμα 1 Α-ΕΠΑΝ 2008)

ΘΕΜΑ 28

Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2008)

2. ΘΕΜΑΤΑ “ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ”

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

ΘΕΜΑ 29

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .
- Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

(Θέμα 1 Β1-ΘΕΤ 2000)

ΘΕΜΑ 30

- $|z|^2 = z \bar{z}$
- $|z^2| = z^2$
- $|z| = -|\bar{z}|$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|i \bar{z}| = |z|$

(Θέμα 1 Α2- 2001)

ΘΕΜΑ 31

- Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$ και συνεχής στο (a, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[a, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.
- Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε $\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

(Θέμα 1 Β2- 2002)

ΘΕΜΑ 32

- Αν $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
- Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [a, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2002)

ΘΕΜΑ 33

- Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και \bar{z} ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.
- Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

(Θέμα 1 Γ- 2003)

ΘΕΜΑ 34

- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x_0) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x_0) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει: $\int f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2003)

ΘΕΜΑ 35

- a. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.
- b. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$.
- c. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$
- d. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x_0) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .
- e. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$

(Θέμα 1 Γ- 2004)

ΘΕΜΑ 36

- a. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- b. Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
- c. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού \mathbb{R} και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.
- d. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$
- e. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x_0) \geq 0$ κοντά στο x_0 , με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΙΛ 2004)

ΘΕΜΑ 37

- a. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.
- b. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- c. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .
- d. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- e. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε ισχύει $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(a)$ για κάθε $x \in \Delta$.
- f. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

(Θέμα 1 Β- 2005)

ΘΕΜΑ 38

- a. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .
- b. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- c. Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
- d. Αν για δυο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$
- e. Οι εικόνες δυο συζυγών μιγαδικών αριθμών z, \bar{z} είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $\chi\chi'$.
- f. Αν η συνάρτησης f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει:
$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

(Θέμα 1 Β-ΕΠΙΛ 2005)

ΘΕΜΑ 39

- a. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z \bar{z}$.
- b. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- c. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- d. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- e. Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

(Θέμα 1 Β- 2006)

ΘΕΜΑ 40

- a. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.
- b. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

- c. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$.
- d. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- e. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

(Θέμα 1 Β-ΕΠΙΛ 2006)

ΘΕΜΑ 41

- a. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$
- b. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x_0) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
- c. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
- d. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.
- e. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.

(Θέμα 1 Β- 2007)

ΘΕΜΑ 42

- a. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα
- b. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x) dx$.
- c. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
- d. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.
- e. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΙΛ 2007)

ΘΕΜΑ 43

- a. Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.
- b. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- c. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών.
- d. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- e. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(Θέμα 1 Β- 2008)

ΘΕΜΑ 44

- a. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
- b. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
- c. Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- d. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

- e. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

(Θέμα 1 Γ-ΕΠΑΝ 2008)

3. ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗΣ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

ΘΕΜΑ 45

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0 .

Στήλη Α Συναρτήσεις	Στήλη Β Εφαπτόμενες
a. $f(x) = 3x^3, x_0 = 1$	1. $y = -2x + \pi$
b. $f(x) = \eta\mu 2x, x_0 = \pi/2$	2. $y = (1/4)x + 1$
c. $f(x) = 3 x , x_0 = 0$	3. $y = 9x - 6$
d. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$	4. $y = -9x + 5$
	5. <i>δεν υπάρχει</i>

(Θέμα 1 Β2-ΘΕΤ 2000)

ΘΕΜΑ 46

Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της Στήλης Β έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4
2. $ z_1^2 $	β. 2
3. $ z_2 ^2$	γ. 25
4. $-\left \overline{z_1}\right $	δ. -5
5. $ i z_2 $	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

(Θέμα 1 Β1- 2001)

ΘΕΜΑ 47

Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

a. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \dots\dots$ b. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \dots\dots$ c. $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \dots\dots$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$

(Θέμα 1 Α2- ΕΠΑΝ 2001)

4. ΘΕΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΜΑ 48

- a. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{5 + i}{2 + 3i}$. Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- b. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει: $\left| \frac{z - 1}{z - i} \right| = 1$.

(Θέμα 2-TEX 2000)

ΘΕΜΑ 49

- a. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:
 $|z + 16| = 4|z + 1|$
- b. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:
 $|z - 1| = |z - i|$

(Θέμα 2 - ΕΠΑΝ 2001)

ΘΕΜΑ 50

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου \bar{z} είναι ο συζυγής του z .

- a. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$.
- b. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.
- c. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

(Θέμα 2 - 2003)

ΘΕΜΑ 51

- a. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\operatorname{Im}(z) \geq 0$
- b. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $\chi\chi'$.

(Θέμα 2-ΕΠΑΝ 2003)

ΘΕΜΑ 52

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

- a. Δείξτε ότι: $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$.
- b. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.
- c. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

(Θέμα 2- 2005)

ΘΕΜΑ 53

- a. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + 4i$ και $2z - \bar{z}_2 = 5 + 5i$, να βρείτε τους z_1, z_2 .
- b. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:
- να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$ και
 - να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

(Θέμα 2-ΕΠΑΝ 2005)

ΘΕΜΑ 54

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

- a. Να αποδείξετε ότι:
- $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.
 - $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$
- b. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

(Θέμα 3- 2006)

ΘΕΜΑ 55

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+ai}{a+2i}$, με $a \in \mathbb{R}$

- a. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.
- b. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2+ai}{a+2i}$ για $a = 0$ και $a = 2$ αντίστοιχα.
- Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1, z_2 .
 - Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$ για κάθε φυσικό ν .

(Θέμα 2- 2007)

