ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Θεωρούμε μια ομάδα 15 μαθητών. Κάθε μαθητής χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $\mu = 1, 2, 3, ..., 15$ και κινείται στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας τροχιά με εξίσωση:

$$C_\mu : x^2 + y^2 - 2\mu x - 4\mu y + 4\mu^2 + 16\mu - 64 = 0 \ (1)$$

Α. i) Να αποδείξετε ότι 14 μαθητές κινούνται κυκλικά και ένας μαθητής είναι ακίνητος.
ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των 14 κυκλικών τροχιών και το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο ακίνητος μαθητής, είναι σημεία συνευθειακά.

Β. i) Να βρείτε τη σχετική θέση των τροχιών του 1ου και του 2ου μαθητή.
ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται η κοινή χορδή των τροχιών του 1ου και του 2ου μαθητή και το εμβαδόν που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τους θετικούς ημιάξονες.

Γ. i) Να βρείτε τη θέση του σημείου $\Lambda(0,3)$ ως προς την τροχιά του 3ου μαθητή.
ii) Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\Lambda(0,3)$ και ορίζει στην τροχιά του 3ου μαθητή, χορδή μήκους 8.

Δ. i) Να βρείτε τη θέση του σημείου στο οποίο βρίσκεται ο ακίνητος μαθητής ως προς την τροχιά του 7ου μαθητή.
ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της τροχιάς του 7ου μαθητή, που διέρχονται από το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο ακίνητος μαθητής.
iii) Να εξετάσετε αν οι ευθείες που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα, εφάπτονται και στις άλλες 13 κυκλικές τροχιές.

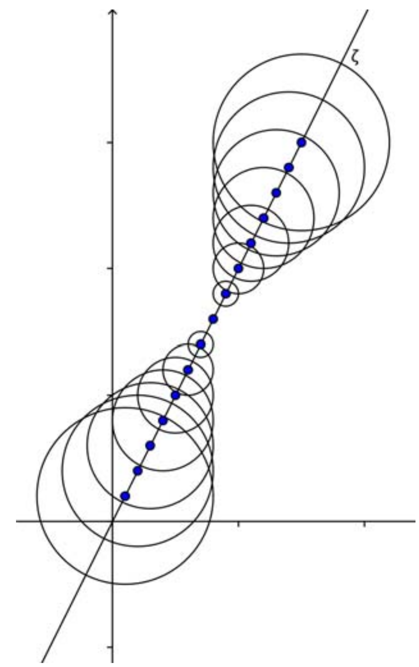
Ε. i) Να βρείτε τη σχετική θέση των τροχιών του 4ου και του 12ου μαθητή.
ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των τροχιών του 4ου και του 12ου μαθητή.

ΛΥΣΗ

Α. i) Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+y^2-2\mu x-4\mu y+4\mu^2+16\mu-64=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2\mu x+\mu^2+y^2-4\mu y+4\mu^2=\mu^2-16\mu+64 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-\mu)^2+(y-2\mu)^2=(\mu-8)^2 \quad (2)$$

Για $\mu \neq 8$ η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}_\mu(\mu,2\mu)$ και ακτίνα $\rho_\mu=|\mu-8|$, ενώ για $\mu=8$ η εξίσωση (2) παριστάνει το σημείο $\mathrm{K}_8(8,16)$.



ii) Έστω $\mathrm{K}_\mu(x,y)$. Είναι:

$$\begin{cases} x=\mu \\ y=2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=x \\ y=2x \end{cases}$$

Οι συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{K}_8(8,16)$ επαληθεύουν την εξίσωση $y=2x$, συνεπώς τα κέντρα των 14 κυκλικών τροχιών και το K_8 ανήκουν στην ευθεία $\zeta: y=2x$.

Β. i) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}_1(1,2)$ και ακτίνα $\rho_1=7$, ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\mathrm{K}_2(2,4)$ και ακτίνα $\rho_2=6$. Είναι:

$$(\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2)=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}$$

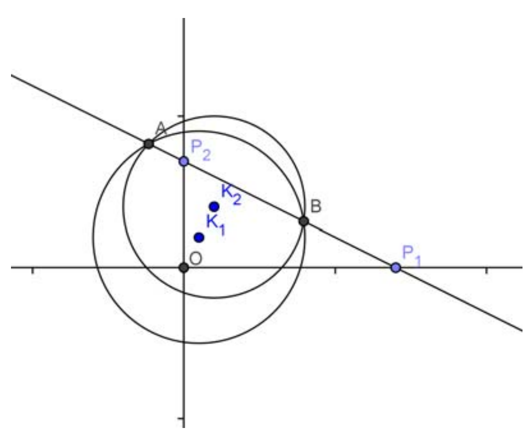
και επειδή $\rho_1-\rho_2<\sqrt{5}<\rho_1+\rho_2$, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι τέμνονται.

ii) - Οι εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2 είναι:

$x^2+y^2-2x-4y-44=0$ και $x^2+y^2-4x-8y-16=0$

και με αφαίρεση κατά μέλη δίνουν

$2x+4y-28=0 \Leftrightarrow x+2y-14=0 \ (3)$.



Η εξίσωση (3) είναι η ζητούμενη, αφού:

Αν $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ είναι το ένα από τα δύο κοινά σημεία των δύο κύκλων, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τις εξισώσεις και των δύο κύκλων,

άρα επαληθεύουν και την εξίσωση (3) που προκύπτει από την κατά μέλη αφαίρεση τους, δηλαδή η ευθεία $\varepsilon : x+2y-14=0$ διέρχεται από το σημείο A.
Με το ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η ευθεία ε διέρχεται και από το άλλο κοινό σημείο B των κύκλων, δηλαδή είναι η ευθεία που ορίζουν τα κοινά τους σημεία A, B.

- Η ευθεία $\varepsilon : x+2y-14=0$, τέμνει τους θετικούς ημιάξονες στα σημεία $\mathrm{P}_1(14,0)$ και $\mathrm{P}_2(0,7)$. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{O}$ είναι:

$$(\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{O})=\frac{14\cdot 7}{2}=49 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Γ. i) Ο κύκλος C_3 έχει κέντρο $\mathrm{K}_3(3,6)$ και ακτίνα $\rho_3=5$. Είναι:

$$(\mathrm{K}_3\Lambda)=\sqrt{(0-3)^2+(3-6)^2}=\sqrt{18}$$

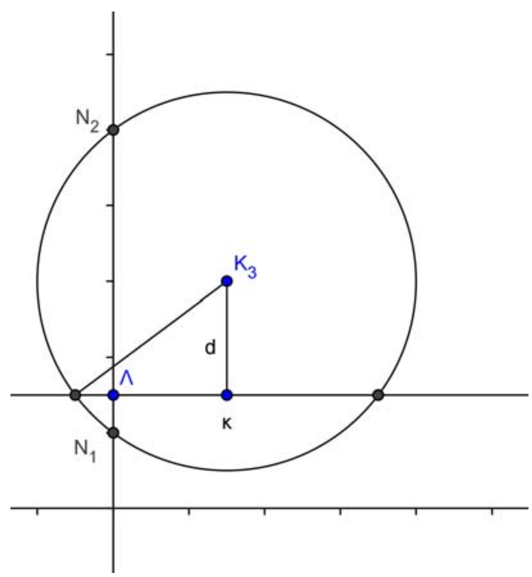
και επειδή $\sqrt{18}<\rho_3$, συμπεραίνουμε ότι το Λ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C_3.

ii) Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $\Lambda(0,3)$ είναι η κατακόρυφη $x=0$ και οι μη κατακόρυφες $y-3=\lambda x \Leftrightarrow \lambda x-y+3=0$.

- Η $x=0$ τέμνει τον κύκλο C_3 στα σημεία που έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-12y-20=0 \\ x=0 \end{cases},$$

δηλαδή στα σημεία $\mathrm{N}_1(0,2)$ και $\mathrm{N}_2(0,10)$.
Είναι $(\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2)=8$, οπότε η $x=0$ είναι μία από τις ζητούμενες ευθείες.



- Αν d η απόσταση του κέντρου $\mathrm{K}_3(3,6)$ από την ευθεία $\lambda x-y+3=0$ και κ το μήκος της χορδής, τότε ισχύει $\rho_3{}^2=d^2+\left(\dfrac{\kappa}{2}\right)^2$.
Όμως $\rho_3=5$ και $\kappa=8$, οπότε προκύπτει $d=3$.
Άρα είναι:

$$d=3 \Leftrightarrow \frac{|3\lambda-6+3|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=3 \Leftrightarrow |3\lambda-3|=3\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda-1|=\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda=0$$

Επομένως η ζητούμενη μη κατακόρυφη ευθεία είναι η $y=3$.

Δ. i) Ο κύκλος C_7 έχει κέντρο $K_7(7,14)$ και ακτίνα $\rho_7=1$. Είναι:

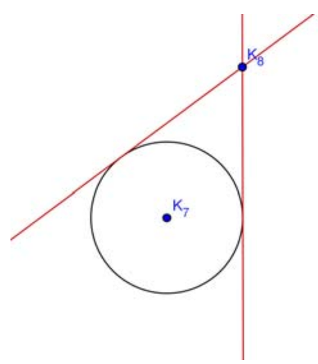
$$(K_7K_8)=\sqrt{(8-7)^2+(16-14)^2}=\sqrt{5}$$

και επειδή $\sqrt{5}>\rho_7$, συμπεραίνουμε ότι το K_8 είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C_7.

ii) Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $K_8(8,16)$ είναι η κατακόρυφη $\eta: x=8$ και οι μη κατακόρυφες $\varepsilon_1: y-16=\lambda(x-8) \Leftrightarrow \lambda x-y+16-8\lambda=0$.

- Η η απέχει από το $K_7(7,14)$ απόσταση $1=\rho_7$, οπότε εφάπτεται του κύκλου C_7.
- Η ε_1 είναι εφαπτομένη του κύκλου C_7, αν και μόνο αν:

$$d(K_7,\varepsilon)=\rho_7 \Leftrightarrow \frac{|7\lambda-14+16-8\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2-\lambda|=\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow (2-\lambda)^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4-4\lambda+\lambda^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{4}$$

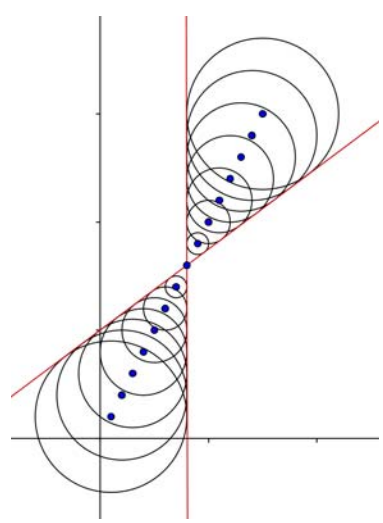


Επομένως η $\varepsilon_1: \frac{3}{4}x-y+8-16\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow 3x-4y+40=0$

είναι η ζητούμενη μη κατακόρυφη εφαπτομένη.

iii) Είναι:

$$d(K_\mu,\eta)=\frac{|\mu-8|}{\sqrt{1}}=\rho_\mu \text{ και}$$
$$d(K_\mu,\varepsilon_1)=\frac{|3\mu-8\mu+40|}{\sqrt{3^2+4^2}}=$$
$$=\frac{|-5\mu+40|}{5}=|\mu-8|=\rho_\mu$$, επομένως οι ευθείες $\eta: x=8$ και $\varepsilon_1: 3x-4y+40=0$ εφάπτονται στις 14 κυκλικές τροχιές.



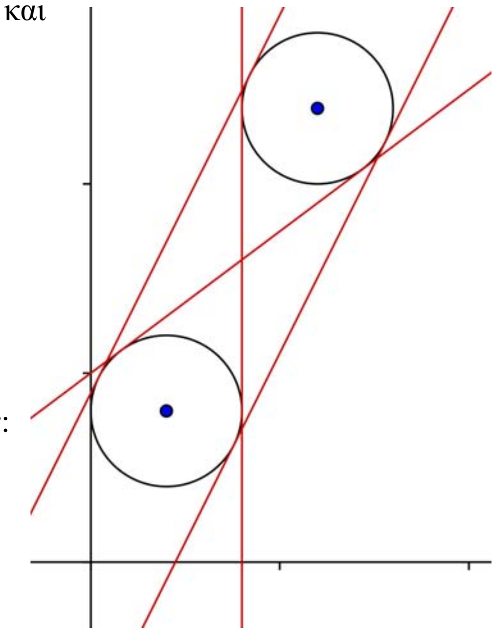
Ε. i) Ο κύκλος C_4 έχει κέντρο $K_4\left(4,8\right)$ και ακτίνα $\rho_4 = 4$, ενώ ο κύκλος C_{12} έχει κέντρο $K_{12}\left(12,24\right)$ και ακτίνα $\rho_{12} = 4$. Είναι:

$$\left(K_4K_{12}\right) = \sqrt{\left(12-4\right)^2 + \left(24-8\right)^2} = \sqrt{320}$$

και επειδή $\sqrt{320} > \rho_4 + \rho_{12}$, συμπεραίνουμε ότι ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.

ii) Οι κύκλοι έχουν 4 κοινές εφαπτομένες, δύο εσωτερικές και δύο εξωτερικές.

- Οι δύο εσωτερικές εφαπτομένες είναι οι ευθείες $\eta : x = 8$ και $\varepsilon_1 : 3x - 4y + 40 = 0$, γιατί τέμνονται στο σημείο $\left(8,16\right)$ που είναι εσωτερικό της διακέντρου K_4K_{12}.
- Είναι $\rho_4 = \rho_8$, οπότε οι κοινές εξωτερικές εφαπτομένες είναι οι ευθείες που απέχουν απόσταση $2\rho_4 = 8$ και έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $\zeta : y = 2x$ που ορίζουν τα κέντρα των δύο κύκλων. Καθεμία από τις δύο εξωτερικές εφαπτομένες απέχει από τη ζ απόσταση ίση με $\rho_4 = 4$, οπότε ένα σημείο $M\left(x,y\right)$ ανήκει σε μια από αυτές, αν και μόνο αν:



$$d\left(M,\zeta\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\left|2x-y\right|}{\sqrt{5}} = 4 \Leftrightarrow \left|2x-y\right| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 4\sqrt{5} = 0 \text{ ή } 2x - y + 4\sqrt{5} = 0$$

Επομένως οι εξωτερικές εφαπτομένες των δύο κύκλων είναι οι:

$$\varepsilon_2 : 2x - y - 4\sqrt{5} = 0 \text{ και } \varepsilon_3 : 2x - y + 4\sqrt{5} = 0$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
ΚΩΣΤΑΚΗΣ ΛΑΜΠΡΟΣ
ΣΑΜΑΡΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ