Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός:
Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α παριστάνει την απόστασή του από το μηδέν, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, και συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Π.χ.: $|5| = 5,\ |-4| = 4,\ |0| = 0$

<u>Επομένως:</u>
Η απόλυτη τιμή ενός μη αρνητικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.
Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.
Δηλαδή:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$$

<u>Απ' τον ορισμό προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω:</u>

- ✓ $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- ✓ $|\alpha| = |-\alpha|$
- ✓ $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ και $|\alpha| \neq \alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$
- ✓ $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$ και $|\alpha| \neq -\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$

Ιδιότητες:

- ➢ $|\alpha| \geq 0$, άρα $|\alpha| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$
- ➢ $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$, άρα $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$
- ➢ $|\alpha|^2 = \alpha^2$ και γενικότερα $|\alpha|^{2\kappa} = \alpha^{2\kappa},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

  Ακόμη είναι: $|\alpha|^{2\kappa+1} = \begin{cases} \alpha^{2\kappa+1}, & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ -\alpha^{2\kappa+1}, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases},\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- ➢ $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ και γενικότερα $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \ldots \cdot |\alpha_\nu|$

  Για $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha$, προκύπτει $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$
- ➢ $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|},\ \beta \neq 0$
- ➢ $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (τριγωνική ανισότητα)

  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0$ και $|\alpha + \beta| = \big||\alpha| - |\beta|\big| \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq 0$

  Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ισχύει γενικότερα για ν αριθμούς, δηλαδή:

  $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|$

Εξισώσεις – Ανισώσεις:

- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \;\; ή \;\; x = -\alpha$
- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \;\; ή \;\; x = -\theta$
- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ και $|x| \le \theta \Leftrightarrow -\theta \le x \le \theta$
- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \;\; ή \;\; x > \theta$ και $|x| \ge \theta \Leftrightarrow x \le -\theta \;\; ή \;\; x \ge \theta$

Απόσταση δύο αριθμών:

Η απόσταση δύο αριθμών α και β συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ ή $d(\beta,\alpha)$ και είναι ίση με $|\alpha-\beta| = |\beta-\alpha|$, δηλαδή:

$$d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|$$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

Α. ***Παραστάσεις με απόλυτα***

1. Να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση:
$\mathrm{A} = |x-4| + 2x$

Λύση:

Όταν η παράσταση περιέχει μία απόλυτη τιμή, τότε για να απαλλαγούμε από το σύμβολό της, εργαζόμαστε με βάση τον ορισμό

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x-4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$, τότε: $|x-4| = x-4$. Άρα:
  $\mathrm{A} = |x-4| + 2x = x-4+2x = 3x-4$

- Αν $x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$, τότε: $|x-4| = -(x-4) = -x+4$. Άρα:
  $\mathrm{A} = |x-4| + 2x = -x+4+2x = x+4$

Επομένως είναι:

$$\mathrm{A} = \begin{cases} 3x-4, & x \ge 4 \\ x+4, & x < 4 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Μερικές φορές δε χρειάζεται να διακρίνουμε περιπτώσεις.

Π.χ.: $|x^2+3| = x^2+3$, αφού $x^2+3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$|-x^2| = -(-x^2) = x^2$, αφού $-x^2 \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2. Να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση:

$$\mathrm{A} = |x-2| - 4|3x-1| + x$$

Λύση:

> Όταν η παράσταση περιέχει δύο ή περισσότερες απόλυτες τιμές, εργαζόμαστε ως εξής:
> - Βρίσκουμε τις τιμές του x που μηδενίζουν τις παραστάσεις που είναι μέσα στα απόλυτα
> - Κάνουμε πίνακα στον οποίο να φαίνονται τα πρόσημα των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα, για τις διάφορες τιμές του x
> - Διακρίνουμε περιπτώσεις, για τις διάφορες τιμές του x

Είναι:

- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
- $3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$	$1/3$		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$3x-1$	$-$	0	$+$		$+$

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται τα πρόσημα των $x-2$ και $3x-1$, για τις διάφορες τιμές του x.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x<\dfrac{1}{3}$, τότε: $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ και $|3x-1| = -(3x-1) = -3x+1$

Άρα:

$$\mathrm{A} = |x-2| - 4|3x-1| + x = -x+2-4(-3x+1)+x = -x+2+12x-4+x = 12x-2$$

- Αν $\dfrac{1}{3} \le x < 2$, τότε: $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ και $|3x-1| = 3x-1$

Άρα:

$$\mathrm{A} = |x-2| - 4|3x-1| + x = -x+2-4(3x-1)+x = -x+2-12x+4+x = -12x+6$$

- Αν $x \ge 2$, τότε: $|x-2| = x-2$ και $|3x-1| = 3x-1$

Άρα:

$$\mathrm{A} = |x-2| - 4|3x-1| + x = x-2-4(3x-1)+x = x-2-12x+4+x = -10x+2$$

Επομένως είναι:

$$\mathrm{A} = \begin{cases} 12x-2, & x<\dfrac{1}{3} \\ -12x+6, & \dfrac{1}{3} \le x < 2 \\ -10x+2, & x \ge 2 \end{cases}$$

3. Αν ισχύει $a<1<b$, να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση:
$A=|1-a|+|1-b|-|a-b|$

Λύση:

Αν υπάρχουν περιορισμοί για τις μεταβλητές που είναι μέσα στα απόλυτα, τότε λαμβάνουμε υπόψη τους περιορισμούς αυτούς και βρίσκουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα

Είναι:

- $a<1 \Leftrightarrow 0<1-a$, άρα $|1-a|=1-a$
- $1<b \Leftrightarrow 1-b<0$, άρα $|1-b|=-(1-b)=b-1$
- $a<b \Leftrightarrow a-b<0$, άρα $|a-b|=-(a-b)=b-a$

Έχουμε λοιπόν:

$$A=|1-a|+|1-b|-|a-b|=$$
$$=(1-a)+(b-1)-(b-a)=$$
$$=1-a+b-1-b+a=0$$

Β. ***Εξισώσεις με απόλυτα***

1. Να λυθεί η εξίσωση:
$|2x+5|=|-x+3|$

Λύση:

Για τη λύση της εξίσωσης $|x|=|\alpha|$, έχουμε:
$|x|=|\alpha| \Leftrightarrow x=\alpha \;\; ή \;\; x=-\alpha$

Είναι:

$$|2x+5|=|-x+3| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+5=-x+3 \quad ή \quad 2x+5=-(-x+3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=-2 \quad ή \quad 2x+5=x-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \quad ή \quad x=-8$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $3|2x+7|-9=0$

ii. $5|3x-4|=0$

iii. $5+2|4x-1|=3$

Λύση:

Για τη λύση της εξίσωσης $|x|=\theta$, έχουμε:
- Αν $\theta>0$, τότε: $|x|=\theta \Leftrightarrow x=\theta \;\; ή \;\; x=-\theta$
- Αν $\theta=0$, τότε: $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$
- Αν $\theta<0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

i. Είναι:

$$3|2x+7|-9=0 \Leftrightarrow 3|2x+7|=9 \Leftrightarrow |2x+7|=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+7=3 \;\; ή \;\; 2x+7=-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=-4 \;\; ή \;\; 2x=-10 \Leftrightarrow x=-2 \;\; ή \;\; x=-5$$

ii. Είναι:

$$5|3x-4|=0 \Leftrightarrow |3x-4|=0 \Leftrightarrow 3x-4=0 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

iii. Είναι:

$$5+2|4x-1|=3 \Leftrightarrow 2|4x-1|=-2 \Leftrightarrow |4x-1|=-1, \text{ που είναι αδύνατη}$$

3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{6|2x-3|-4}{7}+|3-2x|=\frac{3|2x-3|+1}{2}$$

Λύση:

Σε εξίσωση που εμφανίζονται απόλυτα της ίδιας μόνο παράστασης, θέτουμε το απόλυτο ίσο με ω

Είναι $|3-2x|=|2x-3|$, οπότε:

$$\frac{6|2x-3|-4}{7}+|3-2x|=\frac{3|2x-3|+1}{2} \Leftrightarrow \frac{6|2x-3|-4}{7}+|2x-3|=\frac{3|2x-3|+1}{2} \quad (1)$$

Θέτουμε $|2x-3|=\omega\geq 0$. Τότε η (1) γράφεται:

$$\frac{6\omega-4}{7}+\omega=\frac{3\omega+1}{2} \Leftrightarrow 2(6\omega-4)+14\omega=7(3\omega+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12\omega-8+14\omega=21\omega+7 \Leftrightarrow 5\omega=15 \Leftrightarrow \omega=3$$

Επομένως είναι:

$$|2x-3|=3 \Leftrightarrow 2x-3=3 \;\; ή \;\; 2x-3=-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=6 \;\; ή \;\; 2x=0 \Leftrightarrow x=3 \;\; ή \;\; x=0$$

4. Να λυθεί η εξίσωση:

$$|x+2| = -2(x-3)$$

Λύση:

Όταν η εξίσωση περιέχει μια απόλυτη τιμή, τότε δουλεύουμε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

<u>α΄ τρόπος</u>

Βγάζουμε το απόλυτο εργαζόμενοι με βάση τον ορισμό

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -2}$, τότε:

$$|x+2| = -2(x-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+2 = -2x+6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι δεκτή, διότι ικανοποιεί την υπόθεση $x \geq -2$

- Αν $x+2 < 0 \Leftrightarrow \boxed{x < -2}$, τότε:

$$|x+2| = -2(x-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x-2 = -2x+6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 8$$

Η τιμή αυτή απορρίπτεται, διότι δεν ικανοποιεί την υπόθεση $x < -2$

<u>β΄ τρόπος</u>

Διακρίνουμε περιπτώσεις για την παράσταση που δεν είναι μέσα στο απόλυτο

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $-2(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow -2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 3}$, τότε:

$$|x+2| = -2(x-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+2 = -2(x-3) \;\; ή \;\; x+2 = -\left[-2(x-3)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+2 = -2x+6 \;\; ή \;\; x+2 = -(-2x+6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = 4 \;\; ή \;\; x+2 = 2x-6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \;\; ή \;\; x = 8$$

Η τιμή $x = \frac{4}{3}$ είναι δεκτή, διότι ικανοποιεί την υπόθεση $x \leq 3$,

ενώ η τιμή $x = 8$ απορρίπτεται, διότι δεν ικανοποιεί την υπόθεση $x \leq 3$

- Αν $-2(x-3) < 0 \Leftrightarrow -2x+6 < 0 \Leftrightarrow -2x < -6 \Leftrightarrow \boxed{x > 3}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Γ. ***Ανισώσεις με απόλυτα***

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\dfrac{2|x|-1}{4} < \dfrac{2+|x|}{3}$

ii. $2\left|\dfrac{x}{2}-3\right| < 0$

iii. $\dfrac{|x|-4}{3} < -2$

Λύση:

Για τη λύση της ανίσωσης $|x| < \theta$, έχουμε:

- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
- Αν $\theta = 0$, τότε η ανίσωση είναι αδύνατη
- Αν $\theta < 0$, τότε η ανίσωση είναι αδύνατη

i. Είναι:

$$\frac{2|x|-1}{4} < \frac{2+|x|}{3} \Leftrightarrow 3\left(2|x|-1\right) < 4\left(2+|x|\right) \Leftrightarrow 6|x|-3 < 8+4|x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x| < 11 \Leftrightarrow |x| < \frac{11}{2} \Leftrightarrow -\frac{11}{2} < x < \frac{11}{2}$$

ii. Είναι:

$$2\left|\frac{x}{2}-3\right| < 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}-3\right| < 0 \text{, που είναι αδύνατη}$$

iii. Είναι:

$$\frac{|x|-4}{3} < -2 \Leftrightarrow |x|-4 < -6 \Leftrightarrow |x| < -2 \text{, που είναι αδύνατη}$$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $3-|x| \geq \dfrac{3\left(|x|-1\right)}{2}$

ii. $|x+2| \leq 0$

iii. $\dfrac{|3x+5|+4}{3} \leq 1$

Λύση:

Για τη λύση της ανίσωσης $|x| \leq \theta$, έχουμε:

- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
- Αν $\theta = 0$, τότε: $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Αν $\theta < 0$, τότε η ανίσωση είναι αδύνατη

i. Είναι:

$$3-|x|\ge \frac{3(|x|-1)}{2}\Leftrightarrow 6-2|x|\ge 3(|x|-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6-2|x|\ge 3|x|-3\Leftrightarrow 5|x|\le 9\Leftrightarrow |x|\le \frac{9}{5}\Leftrightarrow -\frac{9}{5}\le x\le \frac{9}{5}$$

ii. Είναι:

$$|x+2|\le 0\Leftrightarrow |x+2|=0\Leftrightarrow x+2=0\Leftrightarrow x=-2$$

iii. Είναι:

$$\frac{|3x+5|+4}{3}\le 1\Leftrightarrow |3x+5|+4\le 3\Leftrightarrow |3x+5|\le -1,\ \text{που είναι αδύνατη}$$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\dfrac{3|x|-6}{|x|+2}>2$

ii. $\dfrac{|1-x|}{3}+\dfrac{6-|x-1|}{2}<2+\dfrac{|x-1|+2}{2}$

iii. $|3x-1|-\left|\dfrac{1}{3}-x\right|>-1$

Λύση:

Για τη λύση της ανίσωσης $|x|>\theta$, έχουμε:

- Αν $\theta>0$, τότε: $|x|>\theta\Leftrightarrow x<-\theta\ \ ή\ \ x>\theta$
- Αν $\theta=0$, τότε: $|x|>0\Leftrightarrow x\ne 0$
- Αν $\theta<0$, τότε η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i. Είναι:

$$\frac{3|x|-6}{|x|+2}>2\overset{|x|+2>0}{\Leftrightarrow}(|x|+2)\frac{3|x|-6}{|x|+2}>(|x|+2)2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|x|-6>2|x|+4\Leftrightarrow |x|>10\Leftrightarrow x<-10\ \ ή\ \ x>10$$

ii. Είναι $|1-x|=|x-1|$. Οπότε:

$$\frac{|1-x|}{3}+\frac{6-|x-1|}{2}<2+\frac{|x-1|+2}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-1|}{3}+\frac{6-|x-1|}{2}<2+\frac{|x-1|+2}{2}\quad (1)$$

Θέτουμε $|x-1|=\omega\ge 0$. Τότε η (1) γράφεται:

$$\frac{\omega}{3}+\frac{6-\omega}{2}<2+\frac{\omega+2}{2}\Leftrightarrow 2\omega+3(6-\omega)<12+3(\omega+2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\omega+18-3\omega<12+3\omega+6\Leftrightarrow 4\omega>0\Leftrightarrow \omega>0$$

Επομένως είναι:

$$|x-1|>0\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$$

iii. Είναι:

$$|3x-1|-\left|\frac{1}{3}-x\right|>-1\Leftrightarrow |3x-1|-\left|\frac{1-3x}{3}\right|>-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |3x-1|-\frac{|1-3x|}{|3|}>-1\Leftrightarrow |3x-1|-\frac{|1-3x|}{3}>-1$$

Όμως $|1-3x|=|3x-1|$, οπότε έχουμε:

$$|3x-1|-\frac{|3x-1|}{3}>-1 \quad (1)$$

Θέτουμε $|3x-1|=\omega\geq 0$. Τότε η (1) γράφεται:

$$\omega-\frac{\omega}{3}>-1\Leftrightarrow 3\omega-\omega>-3\Leftrightarrow 2\omega>-3\Leftrightarrow \omega>-\frac{3}{2}$$

Επομένως είναι:

$|3x-1|>-\frac{3}{2}$, που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $|x|+\frac{2(1+|x|)}{3}\geq 5+\frac{|x|+3}{2}$

ii. $\frac{|2x+7|-12}{4}\geq -3$

iii. $\frac{3-|x|}{2}\leq 2$

Λύση:

Για τη λύση της ανίσωσης $|x|\geq\theta$, έχουμε:

Αν $\theta>0$, τότε: $|x|\geq\theta\Leftrightarrow x\leq-\theta$ ή $x\geq\theta$

Αν $\theta=0$, τότε η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Αν $\theta<0$, τότε η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i. Είναι:

$$|x|+\frac{2(1+|x|)}{3}\geq 5+\frac{|x|+3}{2}\Leftrightarrow 6|x|+4(1+|x|)\geq 30+3(|x|+3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6|x|+4+4|x|\geq 30+3|x|+9\Leftrightarrow 7|x|\geq 35\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|\geq 5\Leftrightarrow x\leq -5 \text{ ή } x\geq 5$$

ii. Είναι:

$$\frac{|2x+7|-12}{4} \geq -3 \Leftrightarrow |2x+7|-12 \geq -12 \Leftrightarrow |2x+7| \geq 0$$, που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

iii. Είναι:

$$\frac{3-|x|}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 3-|x| \leq 4 \Leftrightarrow |x| \geq -1$$, που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

Δ. ***Αποδεικτικές ασκήσεις με απόλυτα***

1. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ισότητα:
$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

Λύση:

Εκτελούμε τις πράξεις στο $1^{\text{ο}}$ μέλος της ισότητας και καταλήγουμε στο $2^{\text{ο}}$ μέλος

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&|x+y|^2 + |x-y|^2 = \\
&= (x+y)^2 + (x-y)^2 = \\
&= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = \\
&= 2x^2 + 2y^2 = \\
&= 2|x|^2 + 2|y|^2
\end{aligned}$$

2. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία:
$$|2x+y| < |x+2y| \Leftrightarrow |x| < |y|$$, με $(x+2y)\,y \neq 0$

Λύση:

Υψώνουμε στο τετράγωνο για να απαλλαγούμε από τα απόλυτα και εκτελούμε τις πράξεις

Είναι:

$$\begin{aligned}
&|2x+y| < |x+2y| \Leftrightarrow |2x+y|^2 < |x+2y|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (2x+y)^2 < (x+2y)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 < x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3x^2 < 3y^2 \Leftrightarrow x^2 < y^2 \Leftrightarrow |x|^2 < |y|^2 \Leftrightarrow |x| < |y|
\end{aligned}$$

3. Αν $|x| \le 3$ και $|y| \le 2$, τότε να αποδειχθεί ότι:

$|4x - 3y + 1| \le 19$

Λύση:

Χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα $\left|\alpha \pm \beta\right| \le |\alpha| + |\beta|$

Είναι:

$$|4x-3y+1| \le |4x|+|3y|+|1| = |4||x|+|3||y|+1 =$$
$$= 4|x|+3|y|+1 \le 4\cdot 3+3\cdot 2+1 = 19$$

Επομένως $|4x-3y+1| \le 19$

Ε. ***Συμπληρωματικές ασκήσεις***

1. i. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τους πραγματικούς αριθμούς α και β, όταν: $|\alpha|+|\beta| = 0$;

ii. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a. $|x^2-9|+|9-3x| = 0$

b. $|x-2|+|x-3| = 0$

Λύση:

Ισχύει: $\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ $\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert \ne 0 \Leftrightarrow \alpha \ne 0 \;\; ή \;\; \beta \ne 0$ $\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert > 0 \Leftrightarrow \alpha \ne 0 \;\; ή \;\; \beta \ne 0$

i. Είναι:

$|\alpha| \ge 0$ και $|\beta| \ge 0$, οπότε $|\alpha|+|\beta| \ge 0$. Όμως η σχέση $|\alpha|+|\beta| = 0$ ισχύει μόνο όταν είναι $|\alpha| = 0$ και $|\beta| = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Άρα $|\alpha|+|\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

ii. Από το ερώτημα (i) έχουμε ότι $|\alpha|+|\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. Άρα:

a. $$|x^2-9|+|9-3x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9=0 \\ \text{και} \\ 9-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3)=0 \\ \text{και} \\ -3x=-9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \;\; ή \;\; x=-3 \\ \text{και} \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

b. $\quad |x-2|+|x-3|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \kappa\alpha\iota \\ x=3 \end{cases}$, που είναι αδύνατο

2. Να λυθεί η ανίσωση:

$|2x-1|<|2x+3|$

Λύση:

Είναι:

$$|2x-1|<|2x+3| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2x-1|^2<|2x+3|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^2<(2x+3)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1<4x^2+12x+9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -16x<8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$$

3. Να λυθεί η ανίσωση:

$3<|2x-5|<4$

Λύση:

Είναι:

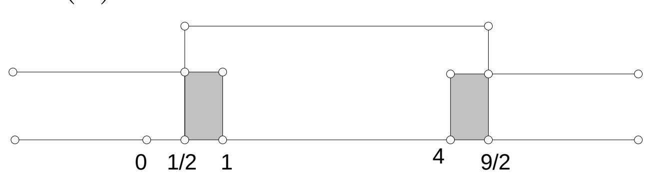
$$3<|2x-5|<4 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-5|>3 \quad (1) \\ \kappa\alpha\iota \\ |2x-5|<4 \quad (2) \end{cases}$$

Από την (1) έχουμε:

$$|2x-5|>3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-5<-3 \quad ή \quad 2x-5>3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x<2 \quad ή \quad 2x>8 \Leftrightarrow x<1 \quad ή \quad x>4 \quad (\alpha)$$

και από τη (2):

$$|2x-5|<4 \Leftrightarrow -4<2x-5<4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<2x<9 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{9}{2} \quad (\beta)$$



Οι (α) και (β) συναληθεύουν όταν: $\frac{1}{2}<x<1 \quad ή \quad 4<x<\frac{9}{2}$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x^2-8|x|+16=0$

ii. $|x^5|-3x^4=0$

Λύση:

i. Είναι:

$$x^2-8|x|+16=0 \Leftrightarrow |x|^2-8|x|+16=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|x|-4)^2=0 \Leftrightarrow |x|-4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|=4 \Leftrightarrow x=4 \quad ή \quad x=-4$$

ii. Είναι:

$$|x^5|-3x^4=0 \Leftrightarrow |x|^5-3|x|^4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|^4(|x|-3)=0 \Leftrightarrow |x|^4=0 \quad ή \quad |x|-3=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|=0 \quad ή \quad |x|=3 \Leftrightarrow x=0 \quad ή \quad x=3 \quad ή \quad x=-3$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $||x-2|+2|=3$

ii. $||x-1|-2|=1$

Λύση:

i. Είναι $|x-2|+2>0$, οπότε $||x-2|+2|=|x-2|+2$.

Άρα:

$$||x-2|+2|=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-2|+2=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2=1 \quad ή \quad x-2=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=3 \quad ή \quad x=1$$

ii. Είναι:

$$||x-1|-2|=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-1|-2=1 \quad ή \quad |x-1|-2=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-1|=3 \quad ή \quad |x-1|=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-1=3 \quad ή \quad x-1=-3 \quad ή \quad x-1=1 \quad ή \quad x-1=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=4 \quad ή \quad x=-2 \quad ή \quad x=2 \quad ή \quad x=0$$

6. Να λυθεί η ανίσωση:

$$d(3,x)+2d(x,1)<2x+7$$

Λύση:

Είναι:

$$d(3,x)+2d(x,1)<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |3-x|+2|x-1|<2x+7 \quad (1)$$

Όμως:

- $3-x=0 \Leftrightarrow x=3$
- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται τα πρόσημα των $3-x$ και $x-1$, για τις διάφορες τιμές του x.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x<1$, τότε: $|3-x|=3-x$ και $|x-1|=-(x-1)=-x+1$

Άρα:

$$(1) \Leftrightarrow |3-x|+2|x-1|<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3-x+2(-x+1)<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3-x-2x+2<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -5x<2 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{5}$$

και επειδή $x<1$, έχουμε: $-\frac{2}{5}<x<1$

- Αν $1\le x<3$, τότε: $|3-x|=3-x$ και $|x-1|=x-1$

Άρα:

$$(1) \Leftrightarrow |3-x|+2|x-1|<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3-x+2(x-1)<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3-x+2x-2<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x<6 \Leftrightarrow x>-6$$

και επειδή $1\le x<3$, έχουμε: $1\le x<3$

- Αν $x\ge 3$, τότε: $|3-x|=-(3-x)=x-3$ και $|x-1|=x-1$

Άρα:

$$(1) \Leftrightarrow |3-x|+2|x-1|<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-3+2(x-1)<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-3+2x-2<2x+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x<12$$

και επειδή $x\ge 3$, έχουμε: $3\le x<12$

Επομένως, η αρχική ανίσωση αληθεύει όταν $-\frac{2}{5}<x<12$

7. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\left| |x-2|-3 \right| < 1$$

Λύση:

Είναι:

$$\left| |x-2|-3 \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < |x-2|-3 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < |x-2| < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| < 4 \\ \kappa\alpha\iota \\ |x-2| > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x-2 < 4 \\ \kappa\alpha\iota \\ x-2 < -2 \quad ή \quad x-2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 6 \\ \kappa\alpha\iota \\ x < 0 \quad ή \quad x > 4 \end{cases}$$

Επομένως, η αρχική ανίσωση αληθεύει όταν $-2 < x < 0 \quad ή \quad 4 < x < 6$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
ΣΑΜΑΡΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΚΩΣΤΑΚΗΣ ΛΑΜΠΡΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ